УДК 658.1

Л.Г. РАСКИН, д-р. техн. наук, НТУ «ХПИ»
В.С. ЗАРУБИН, А.С. ИВАЩЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Запропоновано математичну модель планування модульного виробництва. Показано, що задача планування може бути розв’язана ітераційно з використанням послідовності простих задач.

Введение. Проблема планирования современного многономенклатурного массового производства на содержательном уровне многократно и детально обсуждалась [1-3]. Формальное описание возникающих при этом задач с учетом их высокой размерности было выполнено в [4]. В этой работе было показано, что эффективное направление преодоления «проклятия размерности» состоит в использовании декомпозиционного подхода. С практической точки зрения декомпозиция реализуется путем внедрения модульного принципа организации производства. При этом все множество станков, обеспечивающих изготовление изделий, разбивается на совокупность модулей. Поскольку все станки являются переналаживаемыми, каждый модуль может изготавливать изделия разных типов, образующих группу, "привязанную" к этому модулю. В каждую группу естественно включать те типы изделий, для которых продолжительности взаимных переналадок минимальны. В работе [4] задача планирования производства сведена к последовательному решению двух подзадач.

При решении первой подзадачи осуществляется построение плана назначений групп, удовлетворяющего требуемому плану-заказу производства с минимальным временными затратами. Во второй подзадаче с учетом найденного плана назначений отыскивается оптимальное распределение оставшегося неизрасходованного ресурса модулей с целью максимизации основного критерия - суммарное количество изготовленных изделий.

Там же показано, что формальная модель первой подзадачи имеет вид: найти план $X = (x_{ij})$, максимизирующий

$$F(X) = \sum_{k=1}^{K} \left[A_k - \sum_{i \in M_k} T_{ik} x_{ik} \right] \qquad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$A_k - \sum_{i \in M_k} T_{ik} x_{ik} \geq 0 , \; k = 1,2,\ldots,p . \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{k} x_{ik} = 1 , \; i = 1,2,\ldots m . \qquad (3)$$

Здесь

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{ - я группа изделий производится } k\text{ - м модулем}, \\ 0 \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

M_k - множество групп изделий, которые могут изготовляться k-м модулем,

A_k - временной ресурс k-го модуля,

T_{ik} - суммарное время выполнения плана по изделиям, входящим в i-ю группу, k-м модулем с учетом переналадок.

Для решения этой подзадачи предложен схематически описанный алгоритм. Формальная постановка второй подзадачи не приведена.

Постановка задачи. Сформулированная первая подзадача (1)-(3) является булевой распределительной задачей назначения.

Формальная модель второй подзадачи: найти план $T = (T_{jk})$ распределения оставшегося временного ресурса для каждого из модулей, максимизирующий

$$P(T) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in Nk} T_{jk} \eta_{jk} \tag{4}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j \in Nk} T_{jk} \le R_k(X^*) = A_k - \sum_{i \in Mk} T_{ik} x_{ik}^*, k = 1, 2, \ldots p. \tag{5}$$

Здесь

$X^* = (x_{ik}^*)$ - решение задачи (1)-(3).

$N_k = \{j : j \in E_i, x_{ik}^* = 1\}$ - множество номеров изделий, включенных в план изготовления для k-го модуля,

η_{jk} - производительность k-го модуля для изделий j-го типа.

Основные результаты. Рассмотрим методику решения сформулированных задач. Оптимизационная процедура решения первой подзадачи состоит из двух этапов: предварительного и основного. На предварительном этапе последовательно осуществляется назначение наиболее производительного модуля для каждой из групп изделий. При этом формируется матрица назначений $\{x_{ik}^{(0)}\}$ в соответствии с соотношением

$$x_{ik}^{(0)} = \begin{cases} 1, k = k_0, \\ 0 \text{ в противном случае}, \end{cases} \qquad k_0 = \arg\min_k (T_{ik}). \tag{6}$$

Понятно, что план назначений, формируемый соотношениями (6) является оптимальным в смысле критерия (1), если не учитывать ограничений (2). Поэтому, если полученный на предварительном этапе план удовлетворяет ограничениям (2), то решение первой подзадачи получено. В противном случае, на основном этапе осуществляется коррекция плана, полученного на предварительном этапе, с целью удовлетворения этим ограничениям.

Пусть $X^{(0)} = (x_{ik}^{(0)})$ - план, полученный на предварительном этапе. Вычислим значения ресурса модулей, расходуемого для реализации плана.

$$G_k^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} T_{ik} \cdot x_{ik}^{(0)}.$$

В результате сравнения полученных значений $G_k^{(0)}$ с ресурсными ограничениями R_k, $k=1,2,\ldots K.$, все множество номеров модулей $M = \{1, 2, \ldots K\}$ разобьется на три подмножества:

$$M^- = \{k : G_k^{(0)} > R_k\},\; M^+ = \{k : G_k^{(0)} < R_k\},\; M^{(0)} = \{k : G_k^{(0)} = R_k\}.$$

Столбцы плана, имеющие номера $k \in M^{(0)}$, будем называть нулевыми, столбцы с номерами $k \in M^+$ - избыточными (ресурс модуля не использован полностью, избыточен), столбцы с номерами $k \in M^-$ - недостаточными (план не может быть реализован ввиду недостаточности ресурса).

Процедура коррекции, выполняемая на основном этапе, может быть одношаговой и многошаговой.

Одношаговая процедура. Решаемая этой процедурой задача состоит в том, чтобы из выбранного недостаточного столбца передать назначение в избыточный столбец с минимальными потерями производительности. В соответствии с этим выберем тройку (i_1^*, k_1^*, k_2^*), для которой

$$(i_1^*, k_1^*, k_2^*) = arg \min_{\substack{i \\ k_1 \in M^- \\ k_2 \in M^+}} \{T_{ik_2} - T_{ik_1}\}.$$

Если при этом выполняется неравенство

$$G_{k_2} + T_{ik_2} < R_{k_2}, \tag{7}$$

то назначение на выполнение *i*-й работы от модуля k_1, ресурс которого недостаточен, может быть передано модулю k_2, ресурс которого избыточен.

Тогда план назначений $X^{(0)}$ будет изменен следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ik}^{(0)} - 1, i = i^*, k = k_1^* \in M^-, \\ x_{ik}^{(0)} + 1, i = i^*, k = k_2^* \in M^+, \\ x_{ik}^{(0)},\; [(i = i^*) \cap (k \neq k_1^*) \cap (k \neq k_2^*)] \cup i \neq i^* . \end{cases} \tag{8}$$

Понятно, что реализация преобразования (8) делает столбец k_1 менее недостаточным, а столбец k_2 - менее избыточным. Повторение этих одношаговых коррекций через конечное число шагов приведет к целочисленному плану, удовлетворяющему ограничениям.

Нужно заметить, что коррекция плана, использующая только одношаговые процедуры, не всегда эффективна. Могут быть ситуации, когда многошаговая процедура приведет к лучшему плану назначений, чем одношаговая.

Рассмотрим фрагмент плана назначений, приведенный на рис.1

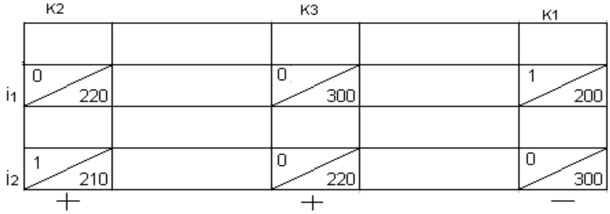

Рис.1 Фрагмент плана назначений

На этом рисунке приведен план назначений для двух типов изделий (i_1 и i_2), реализуемый модулями соответственно k_1 и k_2. Каждая клетка плана разделена диагоналями. При этом справа внизу занесены данные о времени выполнения заказа соответствующим модулям в условных единицах, а слева вверху - элементы плана назначений.

Пусть столбец k_1 - недостаточен, а столбцы k_2 и k_3 - избыточны. Одношаговая коррекция в этой ситуации связана с передачей назначения для выполнения плана по изделию i_1 к модулю k_2 или k_3. Если при этом передача $(i_1,k_1)\rightarrow(i_1,k_2)$ приводит к нарушению неравенства (7), то остается единственная возможность коррекции $(i_1,k_1)\rightarrow(i_1,k_3)$, приводящая к потере суммарной производительности в 100 единиц. Вместе с тем, здесь возможна двухшаговая коррекция: $(i_1,k_1)\rightarrow(i_1,k_2);(i_2,k_2)\rightarrow(i_2,k_3)$, решающая проблему. При этом новый план назначений по изделиям i_1 и i_2 приведен на рис.2, а суммарная потеря производительности составляет всего 30 единиц.

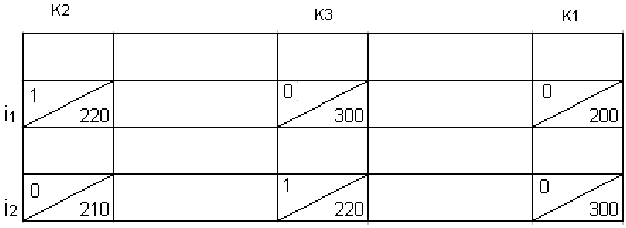

Рис.2 Фрагмент плана назначений (после коррекции)

В соответствии со сказанным двухшаговая процедура реализуется следующим образом. Отыскиваем пятерку $\left(i_1^*, i_2^*, k_1^*, k_2^*, k_3^*\right)$, для которой

$$\left(i_1^*, i_2^*, k_1^*, k_2^*, k_3^*\right) = arg \min_{\substack{i_1, i_2 \\ k_1 \in M^- \\ k_2 \in M^+ \\ k_3 \in M^+}} \left\{\left[\left(T_{i_1 k_2} - T_{i_1 k_1}\right) + \left(T_{i_2 k_3} - T_{i_2 k_2}\right)\right]\right\}.$$

Тогда коррекция плана назначений осуществляется по формуле

$$x_{ik} = \begin{cases} x_{ik}^{(0)} - 1, \left(i = i_1^*, k = k_1^*\right) \cap \left(i = i_2^*, k = k_2^*\right), \\ x_{ik}^{(0)} + 1, \left(i = i_1^*, k = k_2^*\right) \cap \left(i = i_2^*, k = k_3^*\right), \\ x_{ik}^{(0)}, \left[\left(i = i_1^*, k \neq k_1^*, k \neq k_2\right) \cap \left(i = i_2^*, k \neq k_3^*, k \neq k_3\right) \cap \left(i \neq i_1^*\right) \cap \left(i \neq i_2^*\right)\right]. \end{cases}$$

Рассмотрим, наконец, методику решения второй подзадачи (4)-(5) - общей задачи планирования производства. Прежде всего, отметим, что специфика ограничений (5) позволяет исходную двухиндексную задачу (4)-(5) преобразовать в последовательность гораздо более простых одноиндексных независимых задач, решаемых для каждого модуля в отдельности. При этом для k -го модуля целевая функция имеет вид

$$P_к(T) = \sum_{j \in Nk} T_{jk} \eta_{jk}. \tag{9}$$

Искомое для k -го модуля распределение (T_{jk}) оставшегося ресурса $R_k\left(X^*\right)$ должно максимизировать (9), удовлетворяя ограничению (5).

Решение этой задачи тривиально и имеет вид

$$T_{jk} = \begin{cases} \dfrac{A_k - \sum\limits_{i \in M_k} T_{ik} x_{ik}^*}{\eta_{jk}}, & j = j^*, \\ 0, & j \neq j^*, \end{cases}$$

$$j^* = arg \max_{j \in N_k} \frac{A_k - \sum\limits_{i \in M_k} T_{ik} x_{ik}^*}{\eta_{jk}}.$$

Выводы. Таким образом, предложена итерационная вычислительная процедура решения задачи планирования модульного производства высокой размерности. При этом исходная сложная задача сведена к итерационной последовательности гораздо более простых задач, что существенно ослабляет трудности, связанные с размерностью задачи.

Список литературы: 1. *Кузин Б.И., Юрьев В.Н., Шахдинаров Г.М.* Методы и модели управления фирмой. – СПб.: Питер, 2001. -432с. **2.** *Шмален Г.* Основы и проблемы экономики предприятия. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 204с. **3.** *Сачко Н.С.* Организация и оперативное планирование машиностроительного производства. – Мн.: Вышейшая школа, 1977. – 592с. **4.** *Раскин Л.Г., Зарубин В.С.* Планирование модульного производства. // Вестник НТУ «ХПИ». –Х.: НТУ «ХПИ». – 2005. -№41.- СС. 149-152.

Поступила в редколлегию 14.05.06